

УДК 62-752.8(088.8)

**В.С. ГАПОНОВ**, д-р техн. наук; проф. НТУ «ХПИ»;  
**А.И. НАУМОВ**, инженер НТУ «ХПИ»;  
**Ю.А. ОСТАПЧУК**, канд. техн. наук; доц. НТУ «ХПИ»

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОЙ ОПОРЫ С УПРАВЛЯЕМОЙ КВАЗИНУЛЕВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ДЛЯ ПОДШИПНИКОВ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ РОТОРНЫХ СИСТЕМ

Предложена математическая модель упругой опоры с управляемой квазинулевой жесткостью для подшипников высокоскоростных роторных систем с целью использования в задаче обеспечения управления их статической и динамической жесткостями.

Запропонована математична модель упругої опори з керованою квазінульовою жорсткістю для підшипників високошвидкісних роторних систем з наміром використання в задачі забезпечення керування їх статичними та динамічними жорсткостями.

Questions of influence of radial backlashes in caged gearing on a clutch at which specific loading increases by each, on a resource coupler are considered. The estimation method of a residual resource on pressure of a bend of cogs and a calculation example is shown.

**Анализ публикаций.** В работе [1] проведен анализ конструкций и функциональных возможностей упругих опор подшипников высокоскоростных роторных систем. Установлено, что существующие упругие опоры не решают задачу одновременного обеспечения статической и динамической жесткости роторных систем. Поэтому предложен новый принцип работы упругих опор, позволяющий управлять характеристиками жесткости [2, 3]. Опоры с новым принципом работы упругих элементов требуют соответствующей математической модели.

**Цель исследования.** Целью исследования является обоснование математической модели упругой опоры с управляемой квазинулевой жесткостью для подшипников высокоскоростных роторных систем.

**Основная часть.** Рассматриваемая опора подшипников ротора [2] состоит из трех основных частей (рис. 1), которые механически связаны между собой: несущей системы, корректора жесткости и системы регулирования [3].

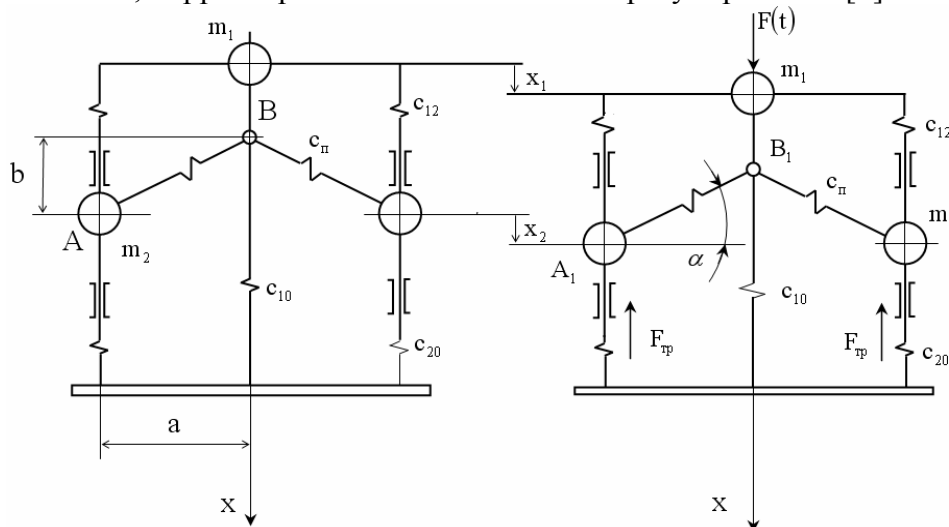


Рис. 1. Схема упругой опоры

Несущая система обеспечивает необходимую несущую способность ротора. Корректор жесткости  $AB$  за счет параллельного подключения к несущей системе упругих элементов, имеющих отрицательную жесткость, обеспечивает реализацию упругой характеристики с участком квазинулевой жесткости на рабочем режиме работы системы. Автоматическая поддержка участка квазинулевой жесткости упругой характеристики в положении, которое отвечает рабочему режиму, осуществляется пассивным регулятором.

#### Геометрические параметры опоры подшипников

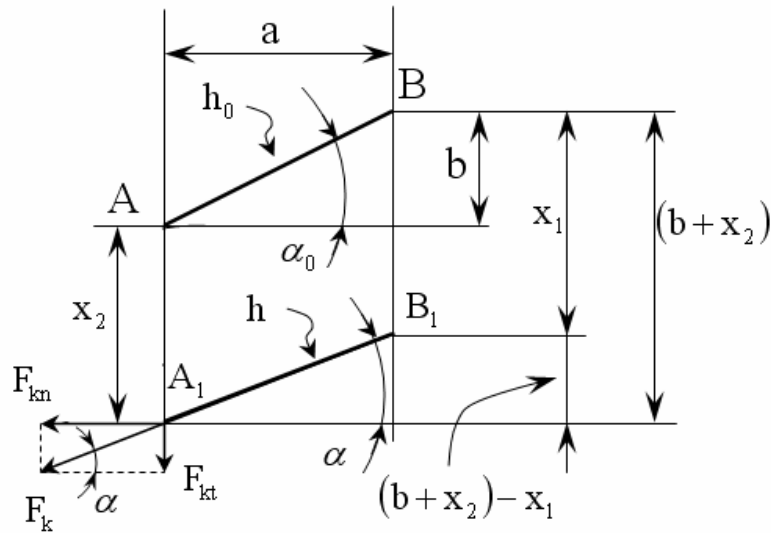


Рис. 2. Зависимость между безразмерными координатами

$$h_0 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad h = \sqrt{h_0^2 + 2b(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)^2}.$$

Сила в корректоре  $F_k = C_n(h_0 - h)$ , где  $C_n$  – жесткость пружины корректора.

Сила трения в направляющих управляющей подсистемы

$$F_{\text{тр}} = F_{kn} \cdot f; \quad F_{kn} = F_k \cdot \cos \alpha = C_n(h_0 - h) \cdot \frac{a}{h};$$

$$f = \begin{cases} f \leftarrow \dot{x}_2 < 0 \\ 0 \leftarrow \dot{x}_2 = 0 \\ -f \leftarrow \dot{x}_2 > 0 \end{cases}; \quad F_{\text{тр}} = C_n(h_0 - h) \cdot \frac{a}{h} \cdot f.$$

Условие самоторможения

$$f \geq \frac{(b + x_2) - x_1}{a}.$$

#### Уравнения движения системы

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + m_2 \dot{x}_2^2. \quad (1)$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{C_{10} x_1^2}{2} + C_{20} x_2^2 + C_{12} (x_2 - x_1)^2 + C_n (h_0 - h)^2. \quad (2)$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + F_i(t); \\ m_1 \ddot{x}_1 + C_{10} x_1 - 2C_{12} (x_2 - x_1) + 2C_n \left( \frac{h_0}{h} - 1 \right) (b + x_2 - x_1) &= F(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_{20} x_2 + C_{12} (x_2 - x_1) - C_n \left( \frac{h_0}{h} - 1 \right) (b + x_2 - x_1 - af) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

### Статика системы

Из  $(F(t) = F; \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0)$  подстановкой в (3) следует

$$\left. \begin{aligned} C_{10} x_1 - 2C_{12} (x_2 - x_1) + 2C_n \left( \frac{h_0}{h} - 1 \right) (b + x_2 - x_1) &= F; \\ C_{20} x_2 + C_{12} (x_2 - x_1) - C_n \left( \frac{h_0}{h} - 1 \right) (b + x_2 - x_1 - af) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

или, обозначив  $x_1 - x_2 \stackrel{def}{=} Z$ , имеем условие самоторможения  $f \geq \frac{b-Z}{a}$  и уравнение

статики системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{F}{C_{10}} &= \left( 1 + C_{12} \frac{C_{10} + 2C_{20}}{C_{10} C_{20}} \right) Z + C_n \left( \frac{h_0}{h} - 1 \right) \left[ \frac{C_{10} + 2C_{20}}{C_{10} C_{20}} (b - Z) - \frac{a}{C_{20}} f \right]; \\ h &= \sqrt{a^2 + (b - Z)^2}. \end{aligned} \right\}$$

В безразмерном виде геометрические параметры:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{b}; \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{b}; \quad \bar{Z} = \frac{Z}{b}; \quad \bar{h} = \sqrt{\bar{h}_0^2 - 2\bar{Z} + \bar{Z}^2};$$

$$\frac{F}{b \cdot C_{10}} = (1 + C_{12} \pi_c) \bar{Z} + C_n \left( \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} - 1 \right) (\pi_c (1 - \bar{Z}) - \pi_f),$$

где

$$\pi_c = \frac{C_{10} + 2C_{20}}{C_{10} C_{20}}; \quad \pi_f = \frac{f}{C_{10} \operatorname{tg} \alpha_0}.$$

### Жесткость системы

$$(b \cdot C_{10})^{-1} \frac{dF}{d\bar{Z}} = 1 + C_{12} \cdot \pi_c + C_n \left[ \frac{\bar{h}_0 (1 - \bar{Z})}{\bar{h}^3} \left( \pi_c - (1 - \bar{Z}) - \pi_f \frac{2}{C_{10}} \right) - \left( \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} - 1 \right) \pi_c \right].$$

Рассмотрим нули функции жесткости системы, соответствующие участку квазиулевой жесткости опоры подшипников

$$(b \cdot C_{10})^{-1} \frac{dF}{d\bar{Z}} = 0.$$

Введем функцию

$$y = 1 + C_{12} \cdot \pi_c + C_n \left[ \frac{\bar{h}_0 (1 - \bar{Z})}{\bar{h}^3} \left( \pi_c - (1 - \bar{Z}) - \pi_f \frac{2}{C_{10}} \right) - \left( \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} - 1 \right) \pi_c \right] = 0;$$

$$\bar{x}_1 = \left( 1 + C_{12} \left( \pi_c - \frac{2}{C_{10}} \right) \bar{Z} \right) + C_n \left( \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} - 1 \right) (1 - \bar{Z}) \left( \pi_c - \frac{2}{C_{10}} \right) - \pi_f;$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \bar{Z};$$

$$\lim_{C_{20} \rightarrow \infty} \pi_c = \lim_{C_{20} \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{C_{20}} + \frac{2}{C_{10}} \right) = \frac{2}{C_{10}}; \quad C_{12} = 0; \quad \lim_{C_{20} \rightarrow \infty} \pi_f = 0,$$

слідовательно,

$$\begin{aligned} \frac{F}{b \cdot C_{10}} &= \bar{Z} + C_n \left( \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} - 1 \right) \cdot \frac{2}{C_{10}} (1 - \bar{Z}); \\ \bar{x}_1 &= \bar{Z} + C_n \left( \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} - 1 \right) \left( (1 - \bar{Z}) \left( \frac{2}{C_{10}} - \frac{2}{C_{10}} \right) \right) = \bar{Z}; \quad \bar{x}_1 = \bar{Z}; \\ y &= 1 + 2 \frac{C_n}{C_{10}} \left[ \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} \left( \frac{(1 - \bar{Z})^2}{\bar{h}^2} - 1 \right) + 1 \right] = 0; \\ \frac{F}{b \cdot C_{10}} &= \bar{x}_1 + 1 \frac{C_n}{C_{10}} \left( \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} - 1 \right) \cdot (1 - \bar{x}_1); \\ y &= 1 + 2 \frac{C_n}{C_{10}} \left[ \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} \left( \frac{(1 - \bar{x}_1)^2}{\bar{h}^2} - 1 \right) + 1 \right] = 0; \\ \bar{h} &= \sqrt{\bar{h}_0^2 - 2\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Проведем анализ уравнения (4).

Параллельный перенос осей декартовых координат  $\bar{x}_1 = \bar{x}'_1 + 1$  дает

$$\bar{h} = \sqrt{\bar{h}_0^2 + \bar{x}'_1{}^2 - 1}; \quad y = 1 + 2 \frac{C_n}{C_{10}} \left[ \frac{\bar{h}_0}{\bar{h}} \left( \frac{\bar{x}'_1{}^2}{\bar{h}^2} - 1 \right) + 1 \right].$$

Тогда  $y(\bar{x}'_1) = y(-\bar{x}'_1)$  функция четная, следовательно,  $y(\bar{x}_1)$  симметрична относительно  $\bar{x}_1 = 1$  (рис. 3).

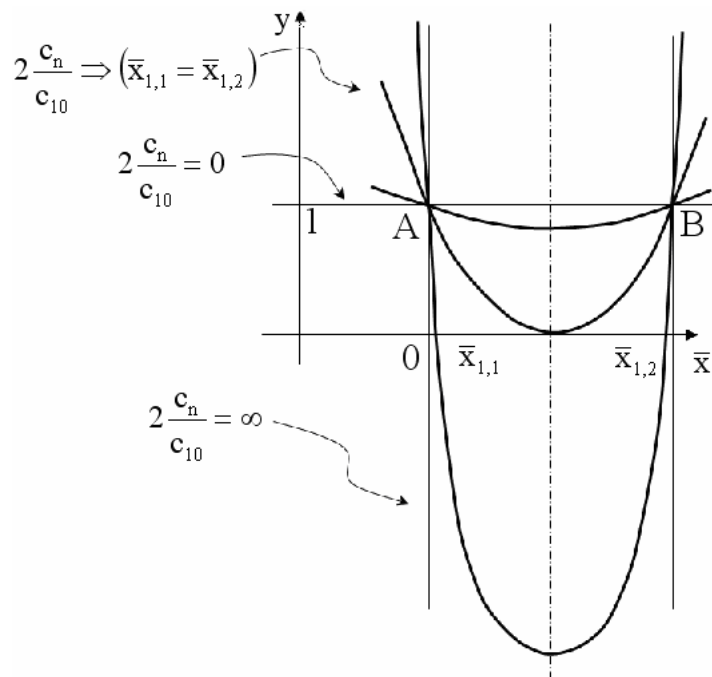


Рис. 3. График изменения функции  $y(\bar{x}_1)$

$$\lim_{\bar{x}_1 \rightarrow \infty} y(\bar{x}_1) = \infty; \quad 2 \frac{C_n}{C_{10}} \Rightarrow (\bar{x}_{1,1} = \bar{x}_{1,2}), \quad 2 \frac{C_n}{C_{10}} = 0;$$

$$\lim_{\bar{x}_1 \rightarrow \infty} y(\bar{x}_1) = 1; \quad \frac{C_n}{C_{10}} \rightarrow 0; \quad \frac{C_n}{C_{10}} \rightarrow \infty.$$

Из совместного решения  $y = 1$  и  $y(\bar{x}_1')$  следует, что точки  $A$  и  $B$  пересечения  $y(\bar{x}_1)$  и  $y = 1$  не зависят от  $C_n \cdot C_{10}^{-1}$  и, следовательно, существуют для всех  $C_n \cdot C_{10}^{-1}$ . Координаты  $A$  и  $B$  (рис. 2)

$$\bar{x}'_{A,B} = \pm \sqrt{[\bar{h}_0 (\bar{h}_0^2 - 1)]^{\frac{2}{3}} - (\bar{h}_0^2 - 1)}.$$

Кратному нулю  $\bar{x}_{1,1} = \bar{x}_{1,2} = 1$  соответствует область существования нулей

$$2 \frac{C_n}{C_{10}} \geq \left( \frac{\bar{h}_0}{\sqrt{\bar{h}_0^2 - 1}} - 1 \right)^{-1} \stackrel{def}{=} K_H$$

и квазиуловому участку упругой характеристике опоры (рис. 4) соответствует

$$2 \frac{C_n}{C_{10}} \geq K_{II}.$$

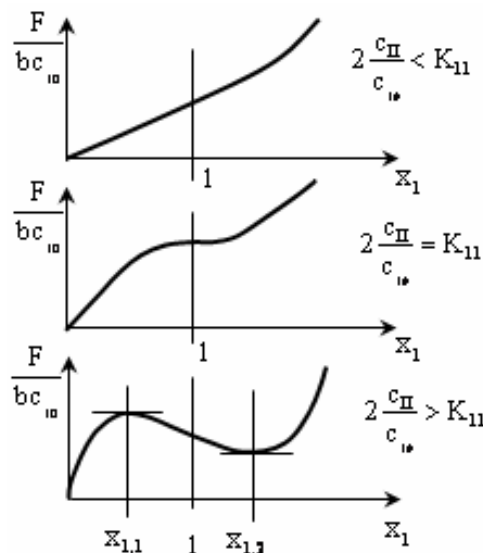


Рис. 4. Качественная зависимость упругой характеристики опоры от безразмерных координат

Из симметрии  $y(\bar{x}_1)$  относительно  $\bar{x}_1 = 1$  следует симметрия  $\bar{x}_{1,1}$  и  $\bar{x}_{1,2}$  относительно  $\bar{x}_1 = 1$ .

Линии равного уровня  $\bar{x}_1 = \text{const}$  на плоскости  $(\alpha_0, 2C_n \cdot C_{10}^{-1})$  показаны на рис. 5.

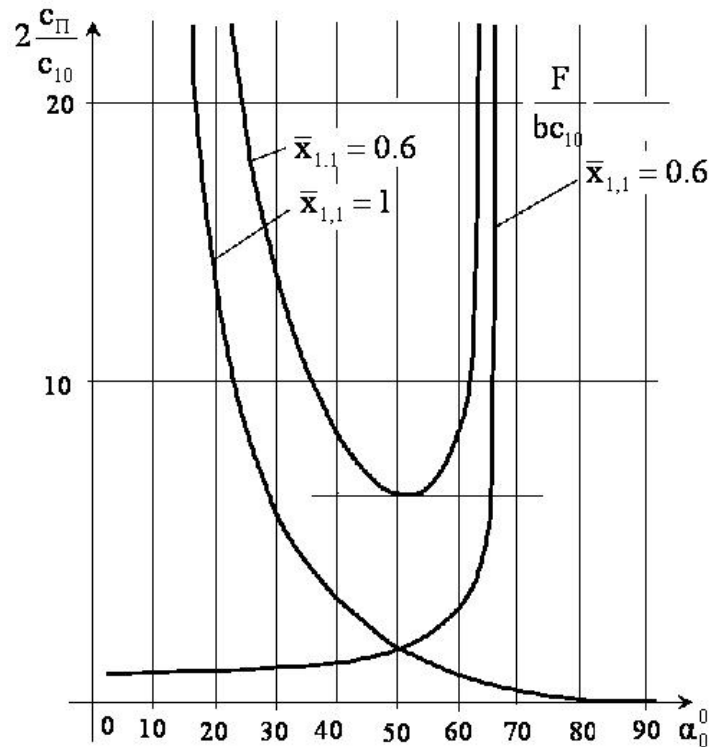


Рис. 5. Линии равного уровня на плоскости параметров упругой опоры

Полученные зависимости позволят разрабатывать опоры с управляемой квазиулево́й жесткостью для подшипников высокоскоростных роторных систем, которые имеют максимально возможную статическую жесткость на нерабочих режимах и минимально возможную жесткость опоры на рабочих, что обеспечит максимально возможную динамическую жесткость и, следовательно, точность работы высокоскоростных роторных систем с сохранением требуемого ресурса.

**Список литературы:** 1. Гапонов, В.С. Аналитический обзор литературы по вопросам конструктивного обеспечения динамической устойчивости высокоскоростных роторных систем [Текст] / В.С. Гапонов, А.В. Гайдамака, Е.Ю. Гладышева // *Машиноведение и САПР. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. науч. трудов.* – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2010. – № 19. – С. 39-44. 2. Патент на винахід 62934 Україна. Пасивна віброзахисна система з керованою квазінульовою жорсткістю / В.С. Гапонов, П.М. Калінін. – 2004. – Бюл. № 1. 3. Гапонов, В.С. Упругая опора подшипников ротора с управляемым изменением квазиулево́й жесткости [Текст] / В.С. Гапонов, А.И. Наумов // *Вісник НТУ «ХПИ».* – 2010. – № 33. – С. 68-73.

© Гапонов В.С., Наумов А.И., Остапчук Ю.А., 2012

Поступила в редколлегию 15.02.12